Cours 4: Dérivation et intégration numériques

1. Introduction et rappels

L'intégration et la dérivation forment le cœur de l'analyse mathématique. Il n'est pas toujours possible de calculer la dérivée et la primitive analytique d'une fonction, pour diverses raisons :

- on ne connaît les primitives que d'un très petit nombre de fonctions,
- ces primitives ne sont pas toujours calculables analytiquement,
- l'expression analytique de la fonction elle-même n'est pas toujours connue (expression numérique issue d'un capteur par exemple).

Nous rapellons ici la formule de Taylor qui démontre qu'une fonction n+1 fois dérivable au voisinage d'un point x_0 peut être approximée par une fonction polynômiale dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}\frac{df}{dx}(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)+...+\frac{(x-x_0)^n}{n!}\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)+R_{n+1}(x)$$

avec

$$R_{n+1}=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(\xi) \quad \text{avec} \quad \xi\in[x;x_0]$$

2. Dérivée numérique

Nous allons maintenant étudier des méthodes numériques pour le calcul approché de

$$\frac{df}{dx}(x)$$

Le procédé le plus simple s'inspire de la définition même de la dérivée:

$$\frac{df}{dx}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

D'après le théorème de Taylor, nous pouvons écrire précisement:

$$\frac{df}{dx}(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{h}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(\xi) \quad \text{avec} \quad \xi\in[x;x+h]$$

Le terme d'erreur $\frac{-h}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(\xi)$ est proportionnel à h et la formule est exacte pour une fonction linéaire.

On peut améliorer ce résultat sans coût suplémentaire en s'appuyant sur le dévelloppement de Taylor d'ordre 3 des fonctions $f(x+h)$ et $f(x-h)$:

$$f(x+h)=f(x)+h\frac{df}{dx}(x)+\frac{h^2}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(x)+\frac{h^3}{6}\frac{d^3 f}{dx^3}(\xi_1) \quad \text{avec} \quad \xi_1\in[x;x+h]$$

$$f(x-h)=f(x)-h\frac{df}{dx}(x)+\frac{h^2}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(x)-\frac{h^3}{6}\frac{d^3 f}{dx^3}(\xi_2) \quad \text{avec} \quad \xi_2\in[x-h;x]$$

Les termes en h^2 disparaissent lors de la différence terme à terme des deux lignes :

$$\frac{df}{dx}(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-\frac{h^2}{6}\frac{d^3f}{dx^3}(\xi)$$

Cette fois-ci, l'erreur de troncature est maintenant en h^2 et la formule est exacte pour les polynomes du second degré.

Nous retiendrons trois façons d'approximer la dérivée d'une fonction:

- Différence finie progressive: $\frac{df}{dx}(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- Différence finie retrograde: $\frac{df}{dx}(x)\approx\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$
- Différence finie centrée: $\frac{df}{dx}(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

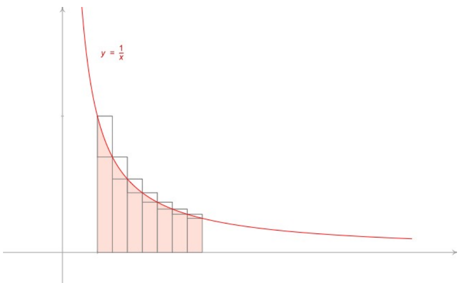
La démonstration précédente a permis de mettre en évidence que la méthode de la différence finie centrée donnait de meilleurs résultats sans pour autant nécessiter d'évaluation supplémentaire de la fonction f .

3. Intégration numérique

Nous allons maintenant étudier des méthodes numériques pour le calcul approché de

$$\int_a^b f(x)dx$$

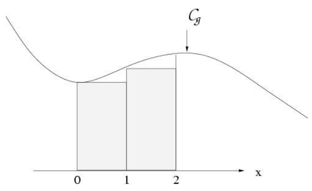
L'idée générale consiste à diviser l'intervalle d'intégration et à estimer la surface délimitée par la courbe et l'axe des abscisses.

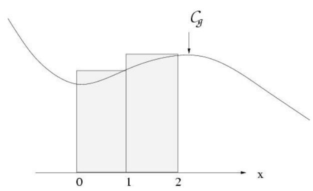


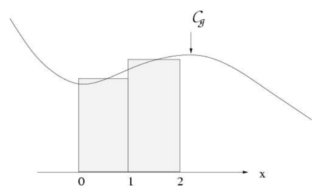
$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{n}\int_{a+i.h}^{a+(i+1)h} f(x)dx \quad \text{avec} \quad h=\frac{b-a}{n}$$

3.1 Méthodes élémentaires

La première approche consiste à évaluer chaque surface en calculant la somme des volumes formés par des rectangles.







Méthode des rectangles à droite | Méthode des rectangles à gauche | Méthode du point milieu

Méthode des rectangles à gauche: $\int_a^{a+h} f(x)dx \approx h.f(a)$

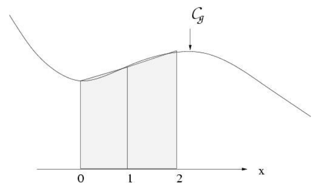
Méthode des rectangles à droite: $\int_a^{a+h} f(x)dx \approx h.f(a+h)$

Méthode du point milieu: $\int_a^{a+h} f(x)dx \approx h.f\left(a+\frac{h}{2}\right)$

En utilisant le théorème de Taylor, il est possible de démontrer que la méthode du point milieu minimise l'erreur.

3.2 Méthodes du trapèze

La méthode du trapèze consiste à approximer l'aire par un trapéze épousant la courbe aux points ayant pour abscisses a et $a+h$.

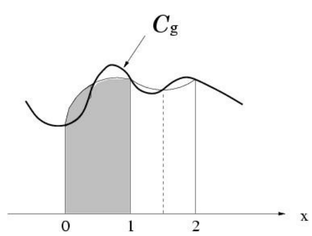


Méthode du trapèze

Méthode du trapèze: $\int_a^{a+h} f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a)+f(a+h))$

3.3 Méthodes de Simpson

La méthode de Simpson consiste à interpoler la courbe par un polynome de degré 2 aux points ayant pour abscisses a , $a+\frac{h}{2}$ et $a+h$.



Méthode de Simpson

Formule de quadrature de Simpson: $\int_a^{a+h} f(x)dx \approx \frac{h}{6}\left[f(a)+4\,f\left(a+\frac{h}{2}\right)+f(a+h)\right]$

3.4 Généralisation: méthode de Newton-Cotes

Les méthodes présentée précédement sont toutes basées sur le même principe: on interpole la courbe par un polynome, puis on calcule l'intégrale de ce polynome:

$$\int_a^{a+h} f(x)dx \approx Ah \sum_{i=0}^{n} W_i \, . \, f(x_i) \quad \text{avec} \quad x_i = a + i\frac{h}{n}$$

	n	A	W_0	W_1	W_2	W_3	W_4	E
Trapèze	1	$1/2$	1	1				$-\frac{h^3}{12}\frac{d^2 f}{dx^2}(\xi)$
Simpson I	2	$1/3$	1	4	1			$-\frac{h^5}{2880}\frac{d^4 f}{dx^4}(\xi)$
Simpson II	3	$1/8$	1	3	3	1		$-\frac{h^5}{6480}\frac{d^4 f}{dx^4}(\xi)$
Villarceau	4	$1/90$	7	32	12	32	7	$-\frac{h^7}{1935360}\frac{d^6 f}{dx^6}(\xi)$